

Terjemahan Bahasa Indonesia

6th Lecture: Methods of Structural Reliability Analysis

Dokumen ini menerjemahkan isi gambar secara berurutan untuk halaman sumber 6.1-6.10.

Halaman sumber 6.1

Kuliah ke-6: Metode Analisis Keandalan Struktur

Tujuan kuliah ini adalah memperkenalkan teknik-teknik yang paling umum dalam analisis keandalan struktur, yaitu First Order Reliability Methods (FORM) dan simulasi Monte Carlo. Pertama, diperkenalkan konsep persamaan keadaan batas dan peubah acak dasar. Selanjutnya dibahas masalah perambatan galat dan ditunjukkan bahwa FORM memberikan generalisasi dari solusi klasik untuk masalah ini. Berbagai kasus fungsi keadaan batas dan karakteristik probabilitas dari peubah acak dasar kemudian diperkenalkan dengan tingkat keumuman yang semakin tinggi. Selain itu, hasil FORM dihubungkan dengan faktor keamanan parsial yang digunakan dalam peraturan perencanaan umum. Setelah itu, crude Monte Carlo dan importance sampling diperkenalkan sebagai alternatif dari metode FORM. Metode-metode teori keandalan struktur yang diperkenalkan menyediakan alat yang kuat untuk menghitung probabilitas kegagalan bagi mode kegagalan atau komponen individual. Berdasarkan kuliah ini, mahasiswa diharapkan memperoleh pengetahuan dan keterampilan mengenai:

- Apa yang dimaksud dengan peubah acak dasar dan apa itu fungsi keadaan batas?
- Apa interpretasi grafis dari indeks keandalan?
- Apa prinsip linearisasi untuk fungsi keadaan batas yang nonlinier?
- Bagaimana mentransformasikan peubah acak berdistribusi non-Normal menjadi peubah acak berdistribusi Normal?
- Bagaimana mempertimbangkan peubah acak yang saling bergantung?
- Bagaimana hasil FORM berhubungan dengan faktor keamanan parsial?
- Apa prinsip metode simulasi Monte Carlo?
- Mengapa importance sampling efektif dan informasi tambahan apa yang dibutuhkan dibandingkan metode crude Monte Carlo?

Halaman sumber 6.2

6.1 Pendahuluan

Perkembangan awal First Order Reliability Methods, yang juga dikenal sebagai metode FORM, terjadi hampir 30 tahun yang lalu. Sejak saat itu, metode-metode tersebut telah disempurnakan dan diperluas secara signifikan, dan kini membentuk salah satu metode terpenting untuk evaluasi keandalan dalam teori keandalan struktur. Berbagai kode komputer komersial telah dikembangkan untuk analisis FORM dan metode ini banyak digunakan pada persoalan rekayasa praktis maupun untuk keperluan kalibrasi kode.

Dalam bab ini, pertama-tama gagasan dasar di balik metode FORM disorot, dan setelah itu langkah-langkah individual dari metode tersebut dijelaskan secara rinci.

Selanjutnya hubungan antara hasil analisis FORM dan faktor keamanan parsial untuk peraturan desain akan dijelaskan. Terakhir, konsep dasar metode Monte Carlo dalam keandalan struktur akan diuraikan.

6.2 Peristiwa Kegagalan dan Peubah Acak Dasar

Dalam analisis keandalan sistem teknis dan komponen, persoalan utamanya adalah mengevaluasi probabilitas kegagalan yang berkaitan dengan suatu periode acuan tertentu. Namun, keadaan lain selain kegagalan dari komponen atau sistem yang ditinjau juga dapat menarik perhatian, misalnya kerusakan berlebih, ketidaktersediaan, dan sebagainya.

Secara umum, setiap keadaan yang dapat dikaitkan dengan konsekuensi dalam bentuk biaya, hilangnya nyawa, dan dampak terhadap lingkungan merupakan hal yang menarik. Dalam pembahasan berikut tidak akan dibedakan di antara berbagai jenis keadaan tersebut, dan demi kesederhanaan semuanya akan disebut sebagai peristiwa kegagalan, dengan tetap mengingat bahwa keadaan non-kegagalan juga dapat diperlakukan dengan cara yang sama.

Adalah praktis untuk mendeskripsikan peristiwa kegagalan dalam bentuk relasi fungsional yang, jika dipenuhi, mendefinisikan bahwa kejadian yang ditinjau akan terjadi. Peristiwa kegagalan dapat dideskripsikan dengan relasi fungsional, yaitu fungsi keadaan batas $g(x)$, sebagai berikut:

$$F = \{ g(x) \leq 0 \}$$

di mana komponen-komponen vektor x adalah realisasi dari peubah acak dasar X yang merepresentasikan semua ketidakpastian relevan yang memengaruhi probabilitas kegagalan. Dalam Persamaan (6.1), peristiwa kegagalan F secara sederhana didefinisikan sebagai himpunan realisasi dari fungsi $g(x)$ yang bernilai nol atau negatif.

Sebagaimana telah disebutkan, kejadian selain kegagalan juga dapat menjadi perhatian dalam analisis keandalan, dan misalnya dalam persoalan pembaruan keandalan juga relevan kejadian dengan bentuk berikut:

$$I = \{ h(x) = 0 \}$$

Setelah peristiwa kegagalan didefinisikan, probabilitas kegagalan dapat ditentukan oleh integral berikut:

Halaman sumber 6.3

$$P_F = \int_{g(x) \leq 0} f_X(x) dx, \text{ untuk } g(x) \leq 0$$

di mana $f_X(x)$ adalah fungsi kerapatan probabilitas gabungan dari peubah acak X . Namun, integral ini tidak trivial untuk diselesaikan, sehingga pendekatan numerik menjadi berguna. Berbagai metode telah diusulkan untuk menyelesaikan integral pada Persamaan (6.3), termasuk teknik integrasi numerik, simulasi Monte Carlo, dan ekspansi Laplace asimtotik. Teknik integrasi numerik dengan cepat menjadi tidak efisien ketika dimensi vektor X meningkat dan secara umum kurang relevan. Dalam pembahasan berikut, fokus akan diarahkan pada metode FORM yang banyak diterapkan dan cukup efisien, yang selanjutnya juga dapat ditunjukkan konsisten dengan solusi yang diperoleh dari ekspansi integral Laplace asimtotik.

6.3 Fungsi Keadaan Batas Linier dan Peubah Berdistribusi Normal

Untuk tujuan ilustratif, mula-mula dipertimbangkan kasus ketika fungsi keadaan batas $g(x)$ merupakan fungsi linier dari peubah acak dasar X . Dengan demikian fungsi keadaan batas dapat dituliskan sebagai:

$$g(x) = a_0 + \sum(a_i x_i)$$

Jika peubah acak dasar berdistribusi Normal, maka margin keamanan linier M didefinisikan melalui:

$$M = a_0 + \sum(a_i X_i)$$

yang juga berdistribusi Normal dengan nilai rata-rata dan varians:

$$\mu_M = a_0 + \sum(a_i \mu_{X_i})$$

$$\sigma_M^2 = \sum(a_i^2 \sigma_{X_i}^2) + \sum(\sum(\rho_{ij} a_i a_j \sigma_i \sigma_j))$$

di mana ρ_{ij} adalah koefisien korelasi antara peubah X_i dan X_j .

Dengan mendefinisikan peristiwa kegagalan menurut Persamaan (6.1), probabilitas kegagalan dapat dituliskan sebagai:

$$P_f = P(g(X) \leq 0) = P(M \leq 0)$$

yang dalam kasus sederhana ini berkurang menjadi evaluasi fungsi distribusi Normal baku:

$$P_f = \Phi(-\beta)$$

di mana β adalah apa yang disebut indeks keandalan (mengikuti Cornell (1969) dan Basler (1961)) yang diberikan oleh:

Halaman sumber 6.4

$$\beta = \mu_M / \sigma_M$$

Indeks keandalan β sebagaimana didefinisikan dalam Persamaan (6.9) memiliki interpretasi geometris sebagaimana diilustrasikan pada Gambar 6.1, di mana dipertimbangkan kasus dua dimensi.

Gambar 6.1: Ilustrasi kasus dua dimensi dari fungsi keadaan batas linier dan peubah acak U yang berdistribusi Normal baku.

Pada Gambar 6.1, fungsi keadaan batas $g(x)$ telah ditransformasikan menjadi fungsi keadaan batas $g(u)$ melalui normalisasi peubah acak menjadi peubah acak berdistribusi Normal baku sebagai berikut:

$$U_i = (X_i - \mu_{X_i}) / \sigma_{X_i}$$

sehingga peubah acak U_i memiliki nilai rata-rata nol dan simpangan baku satu.

Dengan demikian indeks keandalan β mempunyai interpretasi geometris yang sederhana sebagai jarak terkecil dari garis (atau secara umum hiperbidang) yang membentuk batas antara daerah aman dan daerah gagal, yaitu daerah yang didefinisikan oleh peristiwa kegagalan. Perlu dicatat bahwa definisi indeks keandalan ini (menurut Hasofer dan Lind (1974)) tidak bergantung pada fungsi keadaan batas, melainkan pada batas antara daerah aman dan daerah gagal. Titik pada permukaan kegagalan yang mempunyai jarak terkecil ke titik asal umumnya disebut design point atau titik kegagalan yang paling mungkin terjadi.

Terlihat bahwa evaluasi probabilitas kegagalan dalam kasus sederhana ini berkurang menjadi evaluasi sederhana dalam bentuk nilai rata-rata dan simpangan baku dari peubah acak dasar, yaitu informasi orde pertama dan kedua.

6.4 Hukum Akumulasi Galat

Hasil yang diberikan dalam Persamaan (6.6) telah diterapkan untuk mempelajari karakteristik statistik dari galat epsilon yang terakumulasi sesuai dengan suatu fungsi terdiferensialkan $f(x)$, yaitu:

Halaman sumber 6.5

$$\epsilon = f(x)$$

di mana $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ adalah vektor realisasi dari peubah acak X yang merepresentasikan ketidakpastian pengukuran, dengan nilai rata-rata $\mu_x = (\mu_{x1}, \mu_{x2}, \dots, \mu_{xn})^T$ dan kovarians $\text{Cov}[X_i, X_j] = \rho_{ij} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j}$, di mana σ_{x_i} adalah simpangan baku dan ρ_{ij} adalah koefisien korelasi. Gagasannya adalah mendekati fungsi $f(x)$ dengan ekspansi Taylor yang hanya memuat suku-suku linier, yaitu:

$$\epsilon \approx f(x_0) + \sum((x_i - x_{i,0}) * (\partial f / \partial x_i)|_{(x=x_0)})$$

di mana $x_0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, \dots, x_{n,0})^T$ adalah titik tempat linearisasi dilakukan, biasanya dipilih sebagai titik nilai rata-rata, dan $(\partial f / \partial x_i)|_{(x=x_0)}$, $i = 1, 2, \dots, n$ adalah turunan parsial orde pertama dari $f(x)$ yang diambil pada $x = x_0$.

Dari Persamaan (6.12) dan Persamaan (6.6) dapat dilihat bahwa nilai harapan galat $E[\epsilon]$ dapat dinilai dengan:

$$E[\epsilon] = f(\mu_x)$$

dan variansnya $\text{Var}[\epsilon]$ dapat ditentukan dengan:

$$\text{Var}[\epsilon] = \sum((\partial f / \partial x_i)^2 \sigma_{x_i}^2) + \sum(\sum((\partial f / \partial x_i)(\partial f / \partial x_j) \rho_{ij} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j}))$$

Dengan syarat bahwa fungsi distribusi untuk peubah acak diketahui, misalnya berdistribusi Normal, maka fungsi distribusi probabilitas dari galat mudah dinilai. Namun demikian, penting untuk diperhatikan bahwa varians galat sebagaimana diberikan oleh Persamaan (6.14) bergantung pada titik linearisasi, yaitu $x_0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, \dots, x_{n,0})^T$.

Contoh 6.1 - Margin Keamanan Linier

Pertimbangkan batang baja yang hanya menerima pembebanan tarik. Batang akan gagal jika tegangan yang bekerja pada luas penampang batang melebihi tegangan leleh baja. Tegangan leleh R dari batang dan tegangan pembebanan pada batang S diasumsikan dimodelkan sebagai peubah acak Normal yang tidak berkorelasi. Nilai rata-rata dan simpangan baku dari tegangan leleh dan pembebanan masing-masing adalah $\mu_R = 350$ MPa, $\sigma_R = 35$ MPa, $\mu_S = 200$ MPa, dan $\sigma_S = 40$ MPa.

Fungsi keadaan batas yang mendeskripsikan peristiwa kegagalan dapat dituliskan sebagai:

$$g(x) = r - s$$

sehingga margin keamanan M dapat dituliskan sebagai:

$$M = R - S$$

Halaman sumber 6.6

Nilai rata-rata dan simpangan baku dari margin keamanan M adalah:

$$\mu_M = 350 - 200 = 150 \text{ MPa}$$

$$\sigma_M = \sqrt{35^2 + 40^2} = 53.15 \text{ MPa}$$

sehingga indeks keandalannya dapat dihitung sebagai:

$$\text{beta} = 150 / 53.15 = 2.84$$

Akhirnya probabilitas kegagalan ditentukan sebagai:

$$P_f = \Phi(-2.84) = 2.4 \times 10^{-3}$$

Contoh 6.2 - Hukum Akumulasi Galat

Sebagai contoh penggunaan hukum perambatan galat, pertimbangkan segitiga siku-siku ABC, dengan B sebagai sudut siku-siku. Panjang sisi depan b dan sisi samping a diukur. Karena ketidakpastian pengukuran, panjang sisi a dan b dimodelkan sebagai peubah acak berdistribusi Normal independen dengan nilai harapan $\mu_a = 12.2$, $\mu_b = 5.1$, dan simpangan baku masing-masing $\sigma_a = 0.4$ serta $\sigma_b = 0.3$. Diasumsikan bahwa kondisi kritis akan terjadi jika sisi miring c lebih besar dari 13.5 dan probabilitas bahwa kondisi ini terjadi harus dinilai.

Berdasarkan model probabilistik a dan b, karakteristik statistik dari sisi miring c yang diberikan oleh:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

dapat dinilai melalui model perambatan galat yang diberikan oleh Persamaan (6.13)-(6.14), menghasilkan:

$$E[c] = \sqrt{\mu_a^2 + \mu_b^2}$$

$$\text{Var}[c] = (a/\sqrt{a^2+b^2}) \sigma_a^2 + (b/\sqrt{a^2+b^2}) \sigma_b^2$$

yang dengan memasukkan nilai harapan a dan b menghasilkan:

$$E[c] = \sqrt{12.2^2 + 5.1^2} = 13.22$$

$$\text{Var}[c] = 12.2/\sqrt{12.2^2+5.1^2} \sigma_a^2 + 5.1/\sqrt{12.2^2+5.1^2} \sigma_b^2 = 0.182$$

Dari hasil di atas terlihat bahwa varians sisi miring c bergantung pada titik linearisasi yang dipilih. Jika alih-alih titik nilai rata-rata dipilih suatu nilai yang bersesuaian dengan nilai rata-rata ditambah dua simpangan baku, maka varians c akan menjadi:

$$\text{Var}[c] = 13/\sqrt{13^2+5.7^2} 0.4^2 + 5.7/\sqrt{13^2+5.7^2} 0.3^2 = 0.149$$

Halaman sumber 6.7

yang dapat ditunjukkan mengimplikasikan penurunan sebesar 5.55% dari probabilitas bahwa sisi miring lebih besar dari 13.5. Walaupun perubahan seperti itu tampak kecil, hal tersebut dapat menjadi penting dalam situasi praktis ketika konsekuensi dari galat bisa signifikan.

6.5 Fungsi Keadaan Batas Nonlinier

Ketika fungsi keadaan batas bersifat nonlinier terhadap peubah acak dasar X, situasinya tidak sederhana seperti yang dijelaskan sebelumnya. Salah satu pendekatan yang jelas, bagaimanapun, adalah mempertimbangkan hukum perambatan galat yang dijelaskan sebelumnya untuk merepresentasikan daerah kegagalan melalui linearisasi batas antara daerah aman dan daerah gagal, yaitu permukaan kegagalan, tetapi pertanyaannya tetap bagaimana melakukannya secara tepat.

Hasofer dan Lind (1974) mengusulkan melakukan linearisasi ini pada design point dari permukaan kegagalan yang direpresentasikan dalam ruang ternormalisasi. Situasi ini diilustrasikan dalam ruang dua dimensi pada Gambar 6.2.

Gambar 6.2: Ilustrasi linearisasi yang diusulkan oleh Hasofer dan Lind [24] dalam ruang Normal baku.

Pada Gambar 6.2 ditunjukkan sketsa utama yang menggambarkan bahwa permukaan kegagalan dilinearisasi pada design point u^* oleh garis $g'(u) = 0$. Vektor alpha adalah vektor normal keluar terhadap permukaan kegagalan pada design point u^* , yaitu titik pada permukaan kegagalan yang dilinearisasi dengan jarak terpendek - beta - ke titik asal.

Karena fungsi keadaan batas secara umum nonlinier, seseorang tidak mengetahui design point sebelumnya dan titik tersebut harus dicari secara iteratif, misalnya dengan menyelesaikan masalah optimasi berikut:

Halaman sumber 6.8

$$\text{beta} = \min_{u \in \{g(u)=0\}} \sqrt{\sum (u_i)^2}$$

Masalah ini dapat diselesaikan dengan sejumlah cara yang berbeda. Dengan syarat bahwa fungsi keadaan batas terdiferensialkan, skema iterasi sederhana berikut dapat diikuti:

$$\alpha_i = - (\partial g / \partial u_i)(\text{beta} \cdot \alpha) / \sqrt{\sum ((\partial g / \partial u_i)(\text{beta} \cdot \alpha))^2}, i=1,2,\dots,n$$

$$g(\text{beta} \cdot \alpha_1, \text{beta} \cdot \alpha_2, \dots, \text{beta} \cdot \alpha_n) = 0$$

Pertama, suatu design point ditebak $u^* = \text{beta} \cdot \alpha$ dan dimasukkan ke Persamaan (6.16), sehingga diperoleh vektor normal baru alpha terhadap permukaan kegagalan. Kemudian vektor alpha ini dimasukkan ke Persamaan (6.17), yang darinya dihitung nilai beta yang baru.

Skema iterasi ini akan konvergen dalam beberapa langkah, biasanya 6-10 iterasi, dan menghasilkan design point u^* serta indeks keandalan beta dan vektor normal keluar terhadap permukaan kegagalan pada design point alpha. Seperti telah disebutkan, indeks keandalan beta dapat dihubungkan langsung dengan probabilitas kegagalan. Komponen-komponen vektor alpha dapat diinterpretasikan sebagai faktor sensitivitas yang memberikan tingkat kepentingan relatif dari masing-masing peubah acak dasar terhadap indeks keandalan beta.

Second Order Reliability Methods (SORM) mengikuti prinsip yang sama seperti FORM. Namun, sebagai perluasan logis dari FORM, permukaan kegagalan dikembangkan sampai orde kedua pada design point. Hasil analisis SORM dapat diberikan sebagai beta FORM yang dikalikan dengan faktor koreksi yang dievaluasi berdasarkan turunan parsial orde kedua dari permukaan kegagalan pada design point. Jelas bahwa analisis SORM menjadi eksak untuk permukaan kegagalan yang dapat dinyatakan sebagai polinomial orde kedua dari peubah acak dasar. Namun secara umum, hasil analisis SORM dapat ditunjukkan asimtotik eksak untuk bentuk permukaan kegagalan apa pun ketika beta mendekati tak hingga. Pembaca yang berminat dirujuk ke literatur untuk rincian analisis SORM; lihat misalnya Madsen et al. (1986).

Contoh 6.3 - Margin Keamanan Nonlinier

Pertimbangkan kembali batang baja pada contoh sebelumnya. Namun sekarang diasumsikan bahwa luas penampang batang baja A juga tidak pasti.

Tegangan leleh baja R berdistribusi Normal dengan nilai rata-rata dan simpangan baku $\mu_R = 350$, $\sigma_R = 35$ MPa dan pembebanan S berdistribusi Normal dengan nilai rata-rata dan simpangan baku $\mu_S = 1500$, $\sigma_S = 300$ N. Akhirnya, luas penampang A diasumsikan berdistribusi Normal dengan nilai rata-rata dan simpangan baku $\mu_A = 10$, $\sigma_A = 1 \text{ mm}^2$.

Fungsi keadaan batas dapat dituliskan sebagai:

$$g(x) = r \cdot a - s$$

Halaman sumber 6.9

Sekarang langkah pertama adalah mentransformasikan peubah acak berdistribusi Normal R, A, dan S ke dalam peubah acak berdistribusi Normal baku, yaitu:

$$U_R = (R - \mu_R) / \sigma_R$$

$$U_A = (A - \mu_A) / \sigma_A$$

$$U_S = (S - \mu_S) / \sigma_S$$

Fungsi keadaan batas sekarang dapat dituliskan dalam ruang peubah acak berdistribusi Normal baku sebagai:

$$\begin{aligned} g(u) &= (u_R \sigma_R + \mu_R)(u_A \sigma_A + \mu_A) - (u_S \sigma_S + \mu_S) \\ &= (35u_R + 350)(1u_A + 10) - (300u_S + 1500) \\ &= 350u_R + 350u_A - 300u_S + 35u_R u_A + 2000 \end{aligned}$$

Indeks keandalan dan design point dapat ditentukan sesuai dengan Persamaan (6.18) dan (6.19) sebagai:

$$\beta = -2000 / (350\alpha_R + 350\alpha_A - 300\alpha_S + 35\beta \alpha_R \alpha_A)$$

$$\alpha_R = -(1/k)(350 + 35\beta \alpha_A)$$

$$\alpha_A = -(1/k)(350 + 35\beta \alpha_R)$$

$$\alpha_S = 300 / k$$

dengan

$$k = \sqrt{(350 + 35\beta \alpha_A)^2 + (350 + 35\beta \alpha_R)^2 + (300)^2}$$

yang melalui perhitungan memberikan riwayat iterasi yang ditunjukkan pada Tabel 6.1.

Iterasi	Awal	1	2	3	4	5
beta	3.0000	3.6719	3.7399	3.7444	3.7448	3.7448
alpha_R	-0.5800	-0.5701	-0.5612	-0.5611	-0.5610	-0.5610
alpha_A	-0.5800	-0.5701	-0.5612	-0.5611	-0.5610	-0.5610
alpha_S	0.5800	0.5916	0.6084	0.6086	0.6087	0.6087

Tabel 6.1: Riwayat iterasi untuk contoh keadaan batas nonlinier.

Dari Tabel 6.1 terlihat bahwa peubah acak dasar S yang memodelkan beban pada batang baja sedikit mendominasi dengan nilai alpha sebesar 0.6087. Selain itu terlihat bahwa kedua peubah R dan A bertindak sebagai peubah tahanan karena nilai alpha-nya negatif. Probabilitas kegagalan untuk batang baja ditentukan sebagai $P_F = \Phi(-3.7448) = 9.02 \times 10^{-5}$.

Halaman sumber 6.10

6.6 Peubah Acak yang Berkorelasi dan Saling Bergantung

Situasi ketika peubah acak dasar X saling bergantung secara stokastik sering dijumpai dalam persoalan praktis. Untuk peubah acak berdistribusi Normal, fungsi distribusi probabilitas gabungan

dapat dideskripsikan dalam bentuk dua momen pertama, yaitu vektor nilai rata-rata dan matriks kovarians. Namun, hal ini hanya berlaku untuk peubah acak berdistribusi Normal atau Log-normal.

Jika mempertimbangkan kasus peubah acak berdistribusi Normal, situasi seperti ini dapat diperlakukan sepenuhnya mengikuti garis pembahasan sebelumnya. Namun dengan syarat bahwa, selain transformasi dari fungsi keadaan batas yang dinyatakan dalam peubah X ke fungsi keadaan batas yang dinyatakan dalam peubah U, diperkenalkan pula transformasi di antaranya, di mana peubah acak yang ditinjau mula-mula dibakukan sebelum dibuat tak berkorelasi. Dengan kata lain, rangkaian transformasi menghasilkan:

X -> Y -> U

Pada bagian berikut akan diperlihatkan bagaimana transformasi ini dapat diimplementasikan dalam prosedur iteratif yang telah diuraikan sebelumnya.

Misalkan peubah acak dasar X saling berkorelasi dengan matriks kovarians sebagai berikut:

C_x = [Var[X₁] ... Cov[X₁,X_n]; ... ; Cov[X_n,X₁] ... Var[X_n]]

dan matriks koefisien korelasi rho_x:

rho_x = [1 ... rho_{1n}; ... ; rho_{n1} ... 1]

Jika hanya elemen diagonal dari matriks-matriks ini yang tidak nol, maka jelas peubah acak dasar tersebut tidak berkorelasi.

Seperti sebelumnya, langkah pertama adalah mentransformasikan vektor berdimensi n dari peubah acak dasar X menjadi vektor peubah acak baku Y yang memiliki nilai rata-rata nol dan varians satu. Operasi ini dapat dilakukan dengan:

Y_i = (X_i - mu_{X_i}) / sigma_{X_i}, i = 1,2,...,n

Terjemahan Bahasa Indonesia

6th Lecture: Methods of Structural Reliability Analysis

Dokumen ini menerjemahkan isi gambar secara berurutan untuk halaman sumber 6.11-6.20.

Halaman sumber 6.11

dengan matriks kovarians dari Y, yaitu C_y , sama dengan matriks koefisien korelasi dari X, yaitu ρ_x .

Langkah kedua adalah mentransformasikan vektor peubah acak dasar baku Y menjadi vektor peubah acak dasar U yang tidak berkorelasi. Transformasi terakhir ini dapat dilakukan dengan beberapa cara. Pendekatan yang dijelaskan berikut menggunakan faktorisasi Cholesky dari aljabar matriks dan efisien baik untuk perhitungan manual maupun implementasi dalam program komputer.

Transformasi yang diinginkan dapat dituliskan sebagai:

$$Y = T U$$

di mana T adalah matriks segitiga bawah sedemikian sehingga $T_{ij} = 0$ untuk $j > i$. Selanjutnya dapat dilihat bahwa matriks kovarians C_y dapat dituliskan sebagai:

$$C_y = E[Y \cdot Y^T] = E[T \cdot U \cdot U^T \cdot T^T] = T \cdot E[U \cdot U^T] \cdot T^T = T \cdot T^T = \rho_x$$

di mana T^T menyatakan transpose suatu matriks. Dari Persamaan (6.24) dapat dilihat bahwa komponen-komponen T dapat ditentukan sebagai:

$$T_{11} = 1; T_{21} = \rho_{12}; T_{31} = \rho_{13}; T_{22} = \sqrt{1 - T_{21}^2}; T_{32} = (\rho_{23} - T_{31} \cdot T_{21}) / T_{22}; T_{33} = \sqrt{1 - T_{31}^2 - T_{32}^2}; \dots$$

Pertimbangkan contoh sebelumnya namun sekarang dengan informasi tambahan bahwa peubah acak A dan R berkorelasi dengan matriks koefisien korelasi:

$$\rho_x = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{AR} & \rho_{AS} \\ \rho_{RA} & 1 & \rho_{RS} \\ \rho_{SA} & \rho_{SR} & 1 \end{bmatrix}$$

dengan $\rho_{AR} = \rho_{RA} = 0.1$ dan semua koefisien korelasi lainnya sama dengan nol. Matriks transformasi T sekarang dapat dihitung sebagai:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.995 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Komponen-komponen dari vektor Y kemudian dapat dihitung sebagai:

Halaman sumber 6.12

$$Y_A = U_A$$

$$Y_R = 0.1 \cdot U_A + 0.995 \cdot U_R$$

$$Y_S = U_S$$

dan akhirnya komponen-komponen vektor X ditentukan sebagai:

$$X_A = U_A \cdot \sigma_A + \mu_A$$

$$X_R = (0.1 \cdot U_A + 0.995 \cdot U_R) \cdot \sigma_R + \mu_R$$

$$X_S = U_S \cdot \sigma_S + \mu_S$$

sehingga fungsi keadaan batas dapat dituliskan dalam peubah acak U yang tidak berkorelasi dan ternormalisasi sebagai berikut:

$$g(u) = ((0.1 \cdot u_A + 0.995 \cdot u_R) \cdot \sigma_R + \mu_R)(u_A \cdot \sigma_A + \mu_A) - (u_S \cdot \sigma_S + \mu_S)$$

dari sini indeks keandalan dapat dihitung seperti pada contoh sebelumnya.

Apabila peubah acak dasar yang bergantung secara stokastik tidak berdistribusi Normal atau Log-normal, maka ketergantungannya tidak lagi dapat dideskripsikan sepenuhnya dengan koefisien korelasi, sehingga transformasi yang dijelaskan di atas menjadi tidak tepat. Dalam kasus seperti itu, transformasi lain harus diterapkan sebagaimana dijelaskan pada bagian berikut.

6.7 Peubah Acak Non-Normal dan Bergantung

Seperti telah dinyatakan sebelumnya, fungsi distribusi probabilitas gabungan dari suatu vektor acak X hanya dapat sepenuhnya dideskripsikan dalam bentuk fungsi distribusi probabilitas marginal dari masing-masing komponennya dan matriks koefisien korelasi ketika semua komponen X berdistribusi Normal atau Log-normal.

Dalam pembahasan berikut, mula-mula dipertimbangkan kasus sederhana ketika komponen-komponen X saling independen tetapi berdistribusi non-Normal. Setelah itu akan diperlihatkan bagaimana dalam beberapa situasi peubah acak yang saling bergantung dan berdistribusi non-Normal dapat diperlakukan.

Pendekatan Ekor-Normal

Salah satu pendekatan untuk mempertimbangkan masalah peubah acak berdistribusi non-Normal dalam konteks skema iteratif yang diberikan pada Persamaan (6.16)-(6.17) untuk perhitungan indeks keandalan beta adalah dengan mendekati distribusi probabilitas sesungguhnya menggunakan distribusi probabilitas Normal pada design point.

Karena design point biasanya terletak pada bagian ekor dari fungsi distribusi peubah acak dasar, maka skema ini sering disebut sebagai "pendekatan ekor normal".

Dengan menyatakan design point sebagai x^* , pendekatan tersebut diperkenalkan oleh:

$$F_{Xi}(x_i^*) = \Phi((x_i^* - \mu'_{Xi})/\sigma'_{Xi})$$

Halaman sumber 6.13

$$f_{Xi}(x_i^*) = (1/\sigma'_{Xi}) \phi((x_i^* - \mu'_{Xi})/\sigma'_{Xi})$$

di mana μ'_{Xi} dan σ'_{Xi} adalah nilai rata-rata dan simpangan baku yang belum diketahui dari distribusi Normal pendekatan.

Dengan menyelesaikan Persamaan (6.31) dan (6.32) terhadap μ'_{Xi} dan σ'_{Xi} , diperoleh:

$$\sigma'_{Xi} = \phi(\Phi^{-1}(F_{Xi}(x_i^*))) / f_{Xi}(x_i^*)$$

$$\mu'_{Xi} = x_i^* - \Phi^{-1}(F_{Xi}(x_i^*)) \sigma'_{Xi}$$

Transformasi ini dapat dengan mudah diperkenalkan ke dalam evaluasi iteratif indeks keandalan beta sebagai langkah terakhir sebelum peubah acak dasar dinormalisasi.

Transformasi Rosenblatt

Jika fungsi distribusi probabilitas gabungan dari vektor acak X dapat diperoleh dalam bentuk urutan fungsi distribusi probabilitas kondisional, misalnya:

$$F_X(x) = F_{Xn}(x_n | x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \cdot F_{Xn-1}(x_{n-1} | x_1, x_2, \dots, x_{n-2}) \dots F_{X1}(x_1)$$

maka transformasi dari ruang X ke ruang U dapat dilakukan menggunakan apa yang disebut transformasi Rosenblatt:

$$\Phi(u_1) = F_{X1}(x_1)$$

$$\Phi(u_2) = F_{X2}(x_2 | x_1)$$

...

$$\Phi(u_n) = F_{Xn}(x_n | x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

di mana n adalah jumlah peubah acak, $F_{Xj}(x_j | x_1, x_2, \dots, x_{j-1})$ adalah fungsi distribusi probabilitas kondisional untuk peubah acak ke- j dengan syarat realisasi $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}$, dan $\Phi(\cdot)$ adalah fungsi distribusi probabilitas Normal baku. Dari transformasi yang diberikan oleh Persamaan (6.35), peubah acak dasar X dapat diekspresikan dalam bentuk peubah acak berdistribusi Normal baku U melalui:

$$x_1 = F_{X1}^{-1}(\Phi(u_1))$$

$$x_2 = F_{X2}^{-1}(\Phi(u_2 | x_1))$$

...

$$x_n = F_{Xn}^{-1}(\Phi(u_n | x_1, x_2, \dots, x_{n-1}))$$

Dalam beberapa kasus, transformasi Rosenblatt tidak dapat diterapkan karena fungsi distribusi probabilitas kondisional yang diperlukan tidak dapat disediakan. Dalam kasus seperti itu, transformasi lain dapat berguna, misalnya transformasi Nataf, lihat misalnya Madsen et al. (1986).

Halaman sumber 6.14

(1986). Perangkat lunak komersial standar untuk analisis FORM biasanya mencakup sejumlah pilihan untuk merepresentasikan peubah acak bergantung yang berdistribusi non-Normal.

6.8 Perangkat Lunak untuk Analisis Keandalan

Beberapa paket perangkat lunak tersedia untuk analisis FORM sesuai dengan prinsip-prinsip yang diuraikan pada bagian sebelumnya. Sebagian besar program kurang lebih bersifat self-explanatory, dengan syarat prinsip-prinsip dasar analisis FORM telah dipahami.

Pembaca dirujuk pada paket perangkat lunak seperti STRUREL dan VaP, yang informasinya lebih lanjut tersedia di web.

6.9 Penilaian Faktor Keamanan Parsial dengan Analisis FORM

Dalam format desain berbasis peraturan seperti Eurocodes dan Swisscodes, persamaan desain ditetapkan untuk verifikasi kapasitas berbagai jenis komponen struktur terhadap berbagai mode kegagalan. Format tipikal untuk verifikasi suatu komponen struktur diberikan sebagai persamaan desain seperti:

$$z R_c / \gamma_m - (\gamma_G G_c + \gamma_Q Q_c) = 0$$

dengan:

R_c = nilai karakteristik untuk tahanan

z = peubah desain (misalnya luas penampang batang baja yang dipertimbangkan sebelumnya)

G_c = nilai karakteristik untuk beban permanen

Q_c = nilai karakteristik untuk beban variabel

γ_m = faktor keamanan parsial untuk tahanan

γ_G = faktor keamanan parsial untuk beban permanen

γ_Q = faktor keamanan parsial untuk beban variabel

Dalam peraturan, faktor keamanan parsial yang berbeda ditetapkan untuk material yang berbeda dan untuk jenis beban yang berbeda. Lebih lanjut, ketika lebih dari satu beban variabel bekerja, faktor kombinasi dikalikan pada satu atau lebih komponen beban variabel untuk mempertimbangkan fakta bahwa kecil kemungkinan semua beban variabel bekerja dengan nilai ekstrim pada waktu yang sama.

Faktor keamanan parsial bersama dengan nilai karakteristik diperkenalkan untuk menjamin tingkat keandalan minimum tertentu bagi komponen struktur yang dirancang sesuai peraturan. Karena material yang berbeda memiliki ketidakpastian yang berbeda terkait parameter materialnya, maka faktor keamanan parsial pada umumnya juga berbeda untuk material yang berbeda. Prinsip ini diilustrasikan pada Gambar 6.3 untuk kasus sederhana r-s.

Halaman sumber 6.15

Gambar 6.3: Ilustrasi hubungan antara nilai desain, nilai karakteristik, dan faktor keamanan parsial.

Sesuai dengan suatu persamaan desain seperti misalnya Persamaan (6.37), analisis keandalan dapat dilakukan dengan fungsi keadaan batas yang memiliki bentuk sama dengan persamaan desain, tetapi di mana nilai karakteristik untuk peubah tahanan dan beban kini diganti oleh peubah acak dasar, yaitu:

$$zR - (G + Q) = 0$$

Untuk model probabilistik tertentu bagi peubah acak dasar R , G , dan Q , serta dengan persyaratan probabilitas kegagalan maksimum yang diizinkan, kini dimungkinkan menentukan nilai peubah desain z yang bersesuaian dengan probabilitas kegagalan tersebut. Desain semacam itu dapat ditafsirkan sebagai desain optimum karena tepat memenuhi persyaratan yang diberikan terhadap keandalan struktur.

Setelah desain optimum z ditentukan, design point yang bersesuaian dalam ruang asal juga dapat dihitung, yaitu x_d untuk peubah acak dasar. Titik ini dapat ditafsirkan sebagai titik kegagalan yang paling mungkin, yaitu kombinasi keluaran yang paling mungkin dari peubah acak dasar yang mengarah ke kegagalan. Sekarang faktor keamanan parsial dapat diturunkan dari design point untuk berbagai peubah tahanan sebagai:

$$\gamma_m = x_c / x_d$$

dan untuk peubah beban:

$$\gamma_Q = x_d / x_c$$

Halaman sumber 6.16

di mana x_d adalah design point untuk peubah desain yang ditinjau dan x_c adalah nilai karakteristik yang bersesuaian.

Contoh 6.4 - Perhitungan Faktor Keamanan Parsial

Pertimbangkan kembali kasus batang baja. Anggap bahwa indeks keandalan $\beta = 3.7448$ dianggap optimum, yang secara implisit menyiratkan bahwa peubah desain optimum z sama dengan 1. Tugasnya adalah menyusun format desain berbasis faktor keamanan parsial untuk masalah ini.

Tugas pertama adalah menyusun persamaan desain, yang secara sederhana merupakan persamaan keadaan batas di mana peubah acak dasar diganti dengan nilai karakteristik dan dikalikan atau dibagi dengan faktor keamanan parsial, yaitu:

$$z \cdot r_c / \gamma_R \cdot a_c / \gamma_A - s_c \cdot \gamma_S = 0$$

Langkah berikutnya adalah menetapkan nilai karakteristik dan faktor keamanan parsial, dan untuk tujuan ini hasil analisis FORM yang dilakukan sebelumnya dapat digunakan, lihat juga Tabel 6.1. Design point untuk peubah tahanan R diperoleh dengan:

$$r_d = u_R \cdot \sigma_R + \mu_R = -0.561 \cdot 3.7448 \cdot 35 + 350 = 276.56$$

Dengan mendefinisikan nilai karakteristik tahanan sebagai nilai fraktil bawah 5%, yang merupakan definisi tipikal menurut sebagian besar peraturan desain, maka diperoleh:

$$r_c = -1.64 \cdot \sigma_R + \mu_R = -1.64 \cdot 35 + 350 = 292.60$$

dan selanjutnya faktor keamanan parsial untuk tahanan diberikan oleh:

$$\gamma_R = 292.60 / 276.56 = 1.06$$

Demikian pula, sesuai praktik umum peraturan, dengan mendefinisikan a_c sebagai nilai rata-rata dari A dan s_c sebagai nilai fraktil atas 98% dari fungsi distribusi untuk S , diperoleh:

$$\gamma_A = 10.0 / 7.90 = 1.27, \gamma_S = 2242.0 / 2115.0 = 1.06$$

Akhirnya, format desain faktor keamanan parsial yang diturunkan dapat digunakan untuk desain batang baja, di mana persamaan berikut untuk penentuan z menghasilkan:

$$z \cdot 292.6 / 1.06 \cdot 10 / 1.27 - 1.06 \cdot 2115 = 0 \Rightarrow z \approx 1$$

Halaman sumber 6.17

6.10 Metode Simulasi

Integral probabilitas yang dipertimbangkan dalam Persamaan (6.3) untuk estimasinya telah diperlihatkan bahwa metode FORM dapat berhasil diterapkan:

$$P_f = \int f_X(x) dx, \text{ untuk } g(x) \leq 0$$

juga dapat diestimasi dengan apa yang disebut teknik simulasi. Dalam literatur terdapat banyak ragam teknik simulasi, dan pembahasan rinci mengenai tidak akan diberikan dalam teks ini. Di sini hanya dicatat bahwa teknik simulasi telah terbukti bernilai terutama untuk persoalan di mana representasi fungsi keadaan batas menimbulkan kesulitan. Misalnya ketika fungsi keadaan batas tidak terdiferensialkan atau ketika beberapa design point berkontribusi terhadap probabilitas kegagalan.

Namun demikian, karena semua teknik simulasi berakar pada metode yang disebut Monte Carlo, maka prinsip-prinsip dari teknik simulasi yang sangat sederhana ini akan diuraikan secara singkat berikut. Setelah itu akan dijelaskan salah satu teknik yang paling umum diterapkan untuk pemanfaatan analisis FORM bersama teknik simulasi, yaitu metode importance sampling.

Dasar bagi teknik simulasi diilustrasikan dengan baik dengan menuliskan kembali integral probabilitas pada Persamaan (6.41) menggunakan fungsi indikator seperti ditunjukkan pada Persamaan (6.42):

$$P_F = \int f_X(x) dx = \int I[g(x) \leq 0] f_X(x) dx$$

di mana domain integrasi diubah dari bagian ruang sampel vektor $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ yang memenuhi $g(x) \leq 0$ menjadi seluruh ruang sampel X , dan di mana $I[g(x) \leq 0]$ adalah fungsi indikator yang bernilai 1 jika $g(x) \leq 0$ dan sebaliknya bernilai 0. Dengan cara ini Persamaan (6.42) menghasilkan nilai harapan dari fungsi indikator $I[g(x) \leq 0]$. Oleh karena itu, jika sekarang diambil N realisasi dari vektor X , yaitu x_j , $j = 1, 2, \dots, N$, maka dari statistik sampel diperoleh:

$$P_f = (1/N) \sum I[g(x_j) \leq 0]$$

yang merupakan estimator tak bias dari probabilitas kegagalan P_F .

Simulasi Crude Monte Carlo

Teknik simulasi crude Monte Carlo bertumpu langsung pada penerapan Persamaan (6.43). Sejumlah besar realisasi dari peubah acak dasar X , yaitu x_j , $j = 1, 2, \dots, N$, dibangkitkan (atau disimulasikan), dan untuk setiap keluaran x_j diperiksa apakah fungsi keadaan batas yang dievaluasi pada x_j bernilai positif atau tidak. Semua simulasi yang tidak memenuhi kondisi tersebut dihitung (n_F), dan setelah N simulasi probabilitas kegagalan p_F dapat diestimasi melalui:

Halaman sumber 6.18

$$p_F = n_F / N$$

yang kemudian dapat dipandang sebagai nilai harapan sampel dari probabilitas kegagalan. Sebenarnya, untuk N menuju tak hingga, estimasi probabilitas kegagalan menjadi eksak. Namun, simulasi sering kali mahal dalam waktu komputasi dan ketidakpastian dari estimasi tersebut menjadi hal yang menarik. Mudah dipahami bahwa koefisien variasi dari estimasi sebanding dengan $1/\sqrt{n_F}$, yang berarti bahwa jika simulasi Monte Carlo dilakukan untuk mengestimasi probabilitas dalam orde 10^{-6} , maka diharapkan sekitar 10^8 simulasi diperlukan untuk mencapai estimasi dengan koefisien variasi sekitar 10%. Karena itu dibutuhkan sejumlah simulasi yang sangat besar dalam simulasi Monte Carlo, dan semua penyempurnaan dari teknik sederhana ini bertujuan mengurangi varians dari estimasi. Oleh sebab itu, metode-metode semacam ini sering disebut sebagai metode pengurangan varians.

Simulasi dari N keluaran fungsi kerapatan gabungan pada Persamaan (6.44) pada prinsipnya sederhana dan dapat dilihat terdiri atas dua langkah. Di sini langkah-langkah tersebut akan diilustrasikan dengan asumsi bahwa n komponen dari vektor acak X saling independen.

Pada langkah pertama, sebuah bilangan "acak semu" antara 0 dan 1 dibangkitkan untuk setiap komponen dari x_j , yaitu z_{ji} , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, N$. Pembangkitan bilangan semacam itu dapat difasilitasi oleh fungsi bawaan hampir semua bahasa pemrograman dan perangkat lunak spreadsheet.

Pada langkah kedua, keluaran bilangan "acak semu" z_{ji} ditransformasikan menjadi keluaran x_{ji} melalui:

$$x_{ji} = F_{Xi}^{-1}(z_{ji})$$

di mana $F_{Xi}(\cdot)$ adalah fungsi distribusi kumulatif untuk peubah acak X_i .

Prinsip ini juga diilustrasikan pada Gambar 6.4.

Gambar 6.4: Prinsip untuk simulasi suatu peubah acak.

Proses ini dilanjutkan sampai semua komponen dari vektor x_j telah dibangkitkan.

Halaman sumber 6.19

Metode Simulasi Importance Sampling

Seperti telah disebutkan, persoalan dalam menggunakan Persamaan (6.43) adalah bahwa fungsi sampling $f_X(x)$ biasanya terletak jauh dari daerah di mana fungsi indikator $I[g(x) \leq 0]$ memberikan kontribusi. Karena itu tingkat keberhasilan dalam simulasi yang dilakukan menjadi rendah.

Dalam persoalan penilaian keandalan praktis, di mana probabilitas kegagalan tipikal berada pada orde 10^{-3} - 10^{-6} , hal ini pada gilirannya menyebabkan varians estimasi probabilitas kegagalan menjadi cukup besar kecuali dilakukan simulasi dalam jumlah besar.

Untuk mengatasi persoalan ini telah diusulkan berbagai teknik pengurangan varians yang bertujuan, dengan jumlah simulasi yang sama, mengurangi varians dari estimasi probabilitas. Pada bagian berikut akan dipertimbangkan secara singkat salah satu teknik pengurangan varians yang paling umum diterapkan dalam aplikasi keandalan struktur, yaitu metode importance sampling.

Metode importance sampling didasarkan pada pemanfaatan informasi awal mengenai domain yang berkontribusi terhadap integral probabilitas, yaitu daerah yang berkontribusi pada fungsi indikator. Misalkan terlebih dahulu diketahui titik mana dalam ruang sampel x^* yang paling banyak berkontribusi pada probabilitas kegagalan. Dengan memusatkan simulasi pada titik penting ini, maka tingkat keberhasilan dalam simulasi akan lebih tinggi dan varians estimasi probabilitas kegagalan akan berkurang. Sampling yang dipusatkan pada titik penting dapat dilakukan dengan menuliskan kembali Persamaan (6.40) sebagai berikut:

$$P_F = \int I[g(x) \leq 0] f_X(x) dx = \int I[g(x) \leq 0] (f_X(x)/f_S(x)) f_S(x) dx$$

di mana $f_S(x)$ menyatakan fungsi kerapatan importance sampling. Dapat dilihat bahwa integral pada Persamaan (6.46) merepresentasikan nilai harapan dari suku $I[g(x) \leq 0] f_X(x)/f_S(x)$, dengan komponen-komponen S terdistribusi menurut $f_S(s)$. Namun, pertanyaan tentang pemilihan fungsi importance sampling yang tepat $f_S(s)$ tetap terbuka.

Salah satu pendekatan untuk memilih fungsi kerapatan importance sampling $f_S(s)$ adalah dengan memilih fungsi kerapatan probabilitas gabungan Normal berdimensi n dengan komponen tak berkorelasi, nilai rata-rata sama dengan design point sebagaimana diperoleh dari analisis FORM, yaitu $\mu_s = x^*$, dan simpangan baku misalnya sama dengan simpangan baku komponen-komponen X , yaitu $\sigma_s = \sigma_x$. Dalam hal ini Persamaan (6.46) dapat dituliskan sebagai:

$$P_F = \int I[g(s) \leq 0] (f_X(s)/\phi(s)) \phi(s) ds$$

yang ekuivalen dengan Persamaan (6.42) sehingga menghasilkan:

$$P_f = (1/N) \sum I[g(s_j) \leq 0] f_X(s_j)/\phi(s_j)$$

yang dapat dinilai dengan melakukan sampling atas realisasi s seperti telah dijelaskan sebelumnya.

Halaman sumber 6.20

Penerapan Persamaan (6.48) sebagai pengganti Persamaan (6.43) sangat meningkatkan efisiensi simulasi. Jika fungsi keadaan batas tidak terlalu nonlinier di sekitar design point x^* , maka tingkat keberhasilan simulasi akan mendekati 50%. Jika design point diketahui sebelumnya pada suatu

persoalan keandalan di mana probabilitas kegagalan berada pada orde 10^{-6} , jumlah simulasi yang diperlukan untuk mencapai koefisien variasi sekitar 10% adalah sekitar 200. Jumlah ini sangat kontras dengan 10^8 yang dibutuhkan bila menggunakan metode crude Monte Carlo yang dibahas sebelumnya, walaupun tentu saja juga memerlukan pengetahuan tentang design point.